第 21 講　数学的帰納法

21　数学的帰納法を用いて，以下の式を証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①

(2)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$　……②

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$，$a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，$a_n\geqq\dfrac{4}{5}$　……③

(4)　$n!\geqq n\cdot 2^{n-1}-n^2+n$　……④

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数学的帰納法

21　自然数 n に対して，以下を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1)　$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\quad(n\geqq1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

(2)　$3^n>n^2\quad(n\geqq2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　数学的帰納法

21　数学的帰納法を用いて，以下の式を証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①

(2)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$　……②

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$，$a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，$a_n\geqq\dfrac{4}{5}$　……③

(4)　$n!\geqq n\cdot 2^{n-1}-n^2+n$　……④

【答】　略

【解答】

(1)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1$，(右辺)$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$ より①は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，①すなわち　$1+2+\cdots\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$　が成り立つと仮定すると

$$1+2+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

より，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ．

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して①は示された．

(2)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1$，(右辺)$=\dfrac{2\cdot1}{1+1}=1$ より②は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，②すなわち　$1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{2k}{k+1}$　が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}+\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$
$$>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

より，$n=k+1$ のときにも②は成り立つ．

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して②は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　[1]　$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{4}{5}$ より③は成り立つ.

[2]　$n=k(\geqq 1)$ のとき，③すなわち　$a_k \geqq \dfrac{4}{5}$　が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\left(a_k+\frac{4}{a_k}\right)-\frac{4}{5}$$
$$=\frac{(a_k-2)^2}{5a_k}\geqq 0$$

より，$n=k+1$ のときにも③は成り立つ.

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して③は示された.

(4)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1!=1$，(右辺)$=1\cdot 2^0-1^2+1=1$ より④は成り立つ.

また $n=2$ のとき，(左辺)$=2!=2$，(右辺)$=2\cdot 2^1-2^2+2=2$ より④は成り立つ.

[2]　$n=k(\geqq 2)$ のとき，④すなわち　$k!\geqq k\cdot 2^{k-1}-k^2+k$　が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&(k+1)!-\{(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}-(k+1)^2+(k+1)\}\\
&=(k+1)\cdot k!-\{(k+1)\cdot 2^k-(k+1)^2+(k+1)\}\\
&=(k+1)\{k!-2^k+(k+1)-1\}\\
&\geqq (k+1)\{k\cdot 2^{k-1}-k^2+k-2^k+(k+1)-1\}\\
&=(k+1)\{(k-2)\cdot 2^{k-1}-k^2+2k\}\\
&=(k+1)(k-2)(2^{k-1}-k)\\
&=(k+1)(k-2)\{({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1+{}_{k-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{k-1}C_{k-1})-k\}\\
&\geqq (k+1)(k-2)\{({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1)-k\}\\
&=(k+1)(k-2)\{(1+k-1)-k\}\\
&=0
\end{aligned}$$

より，$n=k+1$ のときにも④は成り立つ.

よって，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して④は示された.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数学的帰納法

21　自然数 n に対して，以下を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1)　$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\quad(n\geqq1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

(2)　$3^n>n^2\quad(n\geqq2)$

【答】　略

【解答】

(1)　[1]　$n=1$ のとき，(左辺)$=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$，(右辺)$=\dfrac{1}{5}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=24$ より $(*)$ は成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき，$(*)$ すなわち

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

が成り立つと仮定すると

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$=\frac{1}{5}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$$

より，$n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つことになる．

よって，数学的帰納法により $(*)$ は証明された．

(2)　[1]　$3^2=9$，$2^2=4$ より，$3^n>n^2$ は $n=2$ のとき成り立つ．

[2]　$n=k(\geqq2)$ のとき，$3^k>k^2$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}3^{k+1}-(k+1)^2&>3\cdot k^2-(k+1)^2\\&=2k^2-2k-1\\&=2k(k-1)-1>0\qquad(k\geqq2\text{ より})\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも $3^n>n^2$ が成り立つ．

よって，数学的帰納法により $3^n>n^2$ $(n\geqq2)$ は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。